

受迫薛罗格双匣化学反应模型的随机共振*

康艳梅**, 徐健学, 谢 勇

(西安交通大学建筑工程与力学学院非线性动力学研究所, 西安 710049)

摘 要: 为了在理论上揭示高斯白噪声激励的薛罗格双匣化学反应模型对弱周期扰动的线性与非线性响应, 分四态近似和两态近似两种情形, 基于绝热近似与速率方程方法, 解析导出线性的和非线性的敏感性以及信噪比的表达式, 并与数值模拟结果进行比较, 在一次谐波的意义得到了解析结果与数值模拟结果的定量一致性. 理论上讲, 该模型只能表现出奇次谐波的随机共振, 但数值模拟结果也出现了二次谐波的随机共振, 其原因可能归结为在数值模拟中有限频率的截断引入了误差, 也可能归结为信号的高次谐波与背景噪声难以区分所致.

关键词: 薛罗格双匣模型; 随机共振; 信噪比

中图分类号: O422.8 文献标识码: A

Stochastic Resonance of The Driven Schlögl Model of Two Boxes in Chemical Reaction*

Kang Yanmei**, Xu Jianxue, Xie Yong

Institute of Nonlinear Dynamics, School of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

Abstract In order to theoretically disclose the linear and nonlinear responses of the Gaussian white noise driven Schlögl Model of Two Boxes in chemical reaction to a weak periodic perturbation, the rate equation method is used to derive the analytical expression of linear and nonlinear susceptibilities and the signal-to-noise ratio according to quadrustable or bistable adiabatic approximations within different parameter ranges. The analytically approximate result is also compared with that from numerical simulation. For the parameters under concern, the qualitative agreement is observed between the analytic and the numerical first-order resonant structures when the noise intensity is not in zero limit. Moreover, the analytic results show that the resonant behavior can occur only in the odd-order harmonic of the model, but the numerical simulation also shows the second-order harmonic resonance, which might be induced by the finite frequency truncations on the Gaussian white noise or by the indistinguishability between high-order harmonics and background noise.

Keywords The Schlögl Model of Two Boxes, Stochastic resonance, Signal-to-noise ratio

1 引 言

随机共振, 最初是指标准过阻尼双稳系统中的噪声诱导跃迁与外加弱周期力之间的一种类似于同

步的现象^[1-3], 已被推广为在某个最优的噪声强度, 受噪声调制的系统内部的特征时间尺度——系统的平均首通时间与外部驱动信号发生匹配或者系统的特征频率或固有频率峰被噪声移位到驱动频率而使

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172067, 10432010).

** Corresponding author, E-mail: kangyanmei2002@yahoo.com.cn Received 14 July 2003; in final form 17 November 2003.

得驱动信号得以尽可能放大的现象^[6-9]. 虽然这种现象已经在感觉神经元模型^[10,11]、可兴奋光学系统^[12]、化学反应体系^[13,14]、股票市场模型^[15]等等方

面得到了广泛的研究,但复杂系统的随机共振行为及其理论等仍在进一步的研究之中.

双匣扩散的薛罗格模型是描述在化学反应过程中,两个匣子里面不同反应物组分 x 与 y 通过中间隔板相互渗透过程的一种简化的动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - x^3 + \gamma(y - x) \\ \dot{y} &= \alpha y - y^3 + \gamma(x - y) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, α 为控制参数; γ 为扩散系数. 由于系统(1)在一定的参数范围内有四个稳定的奇点,在它的不稳定态的任意小的邻域内取不同的初值,系统最终演化到哪个定态在化学反应中是一个具有实际意义的问题^[4]. 本工作研究系统(1)在同时受到周期力和随机力作用的情形下的长时间演化及其所表现出的线性和非线性随机共振行为. 文献^[16]中计算一维系统的易感性(susceptibility)的矩方法可直接推广到此种情形以研究随机共振,但在此种情形下也可能涉及到较复杂的运算,因而,我们基于速率方程方法^[2,4]给出解析的信噪比,并基于数值算法^[18]给出部分数值模拟结果. 本工作是首次基于速率方程方法给出多维多稳系统的高次谐波的随机共振的解析推导.

2 由速率方程方法导出易感性

考虑周期力驱动的随机受迫双匣薛罗格模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - x^3 + \gamma(y - x) + \xi_1(t) + \epsilon(t) \\ \dot{y} &= \alpha y - y^3 + \gamma(x - y) + \xi_2(t) + \epsilon(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$\epsilon(t) = Ae^{-i\Omega t}$ 是弱周期力; $\xi_i(t)$ 为统计独立的高斯白噪声,相关函数 $\langle \xi_i(t+\tau)\xi_j(t) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(\tau)$, 其中 $i, j=1, 2$. 假定 $A \ll 1$, $\Omega \ll 1$, $D \ll 1$, 则系统(2)的吸引域基本上仍然是由方程(1)决定的. 因而,系统(2)的整个相空间可以划分为以方程(1)的鞍点的稳定流形为分界线势垒隔开的由稳定奇点的吸引域构成的若干个势阱,从而能够借助于描述离散态概率演化的主方程方法来研究.

2.1 $\alpha > 3\gamma$ 情形

当 $\alpha > 3\gamma$ 时,方程(1)有 9 个奇点:

$$\begin{aligned} O(0, 0), A_1(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}), A_2(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}), \\ A_3(\sqrt{\alpha-2\gamma}, -\sqrt{\alpha-2\gamma}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4(-\sqrt{\alpha-2\gamma}, \sqrt{\alpha-2\gamma}), \\ B_1\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right), B_2\left(-\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right), \\ B_3\left(\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{\sqrt{2}}\right), B_4\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

这里,

$$\begin{aligned} c &= [(\alpha - \gamma) + \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 - 4\gamma^2}]^{1/2} \\ d &= [(\alpha - \gamma) - \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 - 4\gamma^2}]^{1/2} \end{aligned}$$

方程(1)的雅可比矩阵在点 O 的特征值 $(\alpha - \gamma) \pm \gamma$ 均为正,在点 $A_{1,2}$ 的特征值 $-(2\alpha + \gamma) \pm \gamma$ 均为负,在点 $A_{3,4}$ 的特征值 $-(2\alpha - 5\gamma) \pm \gamma$ 均为负,在点 B_i 的特征值 $\eta_{1,2} = \frac{-(\alpha - \gamma) \pm \sqrt{9\alpha^2 - 18\alpha\gamma - 23\gamma^2}}{2}$ 异号,因而 O 为不稳定奇点, A_i 为稳定奇点, B_i 为鞍点(这里 $i=1, 2, 3, 4$), 如图 1 所示.

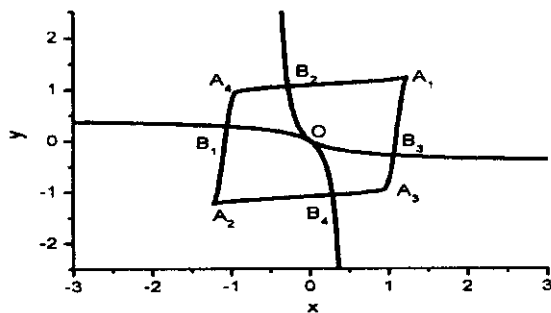


图 1 方程(1)的奇点及不变流形

Fig. 1 The singular points and invariant manifolds of Eq. (1)

$$\alpha=1.5, \gamma=0.3.$$

由位势理论^[17]易知,在不考虑周期激励时,式(2)系统的福克-普朗克方程具有精确的广义势函数

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0.25x^4 - 0.5\alpha x^2 + 0.5\gamma(y - x)^2 + \\ &0.25y^4 - 0.5\alpha y^2 \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $D \ll 1$, 根据多维多稳态之间的概率跃迁理论^[4], 只有相邻的势阱之间才有概率跃迁,而且概率跃迁主要沿鞍点的不稳定流形进行,并且概率跃迁速率

$$\begin{aligned} R_{13} &= R_{14} = R_{23} = R_{24} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \\ &\exp\left[-\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4D}\right] = r_1 \quad (4) \\ R_{31} &= R_{32} = R_{41} = R_{42} \\ &= \frac{\sqrt{(\alpha - 3\gamma)(\alpha - 2\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \end{aligned}$$

$$\exp\left[-\frac{(\alpha-3\gamma)^2}{4D}\right] = r_2 \quad (5)$$

在假定 $A \ll 1$ 和 $\Omega \ll 1$ 的条件下, 系统(2)在各个定态的吸引域内达到局域平衡所需的时间远小于其本身跟随外力变化所需的时间, 从而在绝热近似的条件下系统(2)的准势函数可把周期力 $\epsilon(t)$ 看作一个常数来求得, 即

$$\tilde{U}(x, y) = 0.25x^4 - 0.5\alpha x^2 - x\epsilon(t) + 0.5\gamma(y-x)^2 + 0.25y^4 - 0.5\alpha y^2 - y\epsilon(t) \quad (6)$$

相应地, 各势阱之间的概率跃迁速率变为

$$\tilde{R}_{13} = \tilde{R}_{14} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \exp\left[-\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4D} + \frac{1}{D}\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha}\right)\epsilon(t)\right] \quad (7)$$

$$\tilde{R}_{23} = \tilde{R}_{24} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \exp\left[-\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4D} + \frac{1}{D}\left(\frac{d-c}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\alpha}\right)\epsilon(t)\right] \quad (8)$$

$$\tilde{R}_{31} = \tilde{R}_{41} = \frac{\sqrt{(\alpha-3\gamma)(\alpha-2\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \exp\left[-\frac{(\alpha-3\gamma)^2}{4D} + \frac{c-d}{\sqrt{2}D}\epsilon(t)\right] \quad (9)$$

$$\tilde{R}_{32} = \tilde{R}_{42} = \frac{\sqrt{(\alpha-3\gamma)(\alpha-2\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_1}{-\eta_2}} \times \exp\left[-\frac{(\alpha-3\gamma)^2}{4D} + \frac{d-c}{\sqrt{2}D}\epsilon(t)\right] \quad (10)$$

于是, 在热近似条件下, 系统(2)的长时间演化行为可以简化为各势阱概率 $p_i(t)$ 之间进行概率交换的速率方程

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\tilde{R}_{13} + \tilde{R}_{14})p_1(t) + \tilde{R}_{31}p_3(t) + \tilde{R}_{41}p_4(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -(\tilde{R}_{23} + \tilde{R}_{24})p_2(t) + \tilde{R}_{32}p_3(t) + \tilde{R}_{42}p_4(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \tilde{R}_{13}p_1(t) + \tilde{R}_{23}p_2(t) - (\tilde{R}_{31} + \tilde{R}_{32})p_3(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \tilde{R}_{14}p_1(t) + \tilde{R}_{24}p_2(t) - (\tilde{R}_{41} + \tilde{R}_{42})p_4(t) \end{cases} \quad (11)$$

由于主方程(11)是周期系数的微分方程组, 由 Floquet 理论^[11], 它的长时间解也是周期的, 并且周期 $T = 2\pi/\Omega$, 可设为

$$p_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,n}\epsilon(t)^n \quad (12)$$

其中 $i=1, 2, 3, 4$; $p_{i,n}$ 为待定系数, 则由全概率守恒

有 $\sum_{n=0}^4 p_{i,n} = \delta_{n0}$. 为了确定 $p_{i,n}$, 把 \tilde{R}_{ij} 在 R_{ij} 关于 $\epsilon(t)$ 的泰勒级数代入微分方程组(11), 并令方程两边 $\epsilon(t)$ 的同次幂的系数相等, 可逐次解得

$$p_{10} = p_{20} = \frac{r_2}{2(r_1+r_2)} \quad (13)$$

$$p_{30} = p_{40} = \frac{r_1}{2(r_1+r_2)} \quad (14)$$

$$p_{11} = -p_{21} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{D} \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \frac{1}{2r_1-i\Omega} \quad (15)$$

$$p_{31} = p_{41} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_{12} = p_{22} = -p_{32} = -p_{42} \\ = \frac{1}{r_1+r_2-i\Omega} \left[-\frac{r_1}{D} \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha} \right) p_{11} + \frac{\sqrt{\alpha}}{D^2} \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - \sqrt{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} p_{13} = -p_{23} = \frac{1}{2r_1-3i\Omega} \left\{ \frac{r_1 r_2}{6(r_1+r_2)D^3} \times \left[\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} \right)^3 - \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha} \right)^3 \right] - \frac{r_1}{D^2} \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha} \right)^2 p_{11} - \left[\frac{2r_1}{D} \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha} \right) + \frac{2r_2}{D} \frac{c-d}{\sqrt{2}} \right] p_{12} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$p_{33} = p_{43} = 0 \quad (19)$$

由于在绝热近似条件下, 系统(2)的运动主要集中在各势阱的底部, 由式(12)及易感性的定义^[16], 系统(2)的总体响应 $u(t) = x(t) + y(t)$ 的长时间均值可近似表示为

$$\langle u(t) \rangle_{as} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi^{(n)}(\Omega) \epsilon^n(t) \quad (20)$$

其中第 n 阶易感性

$$\chi^{(n)}(\Omega) = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) p_{i,n} \quad (21)$$

这里 (x_i, y_i) 是第 i 个势阱的最低点 A_i 的坐标. 把式(15)~(19)代入式(21), 依次可得

$$\chi^{(1)}(\Omega) = \frac{8\alpha}{D} \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \frac{1}{2r_1-i\Omega} \quad (22)$$

$$\chi^{(2)}(\Omega) = 0 \quad (23)$$

$$\chi^{(3)}(\Omega) = 4\sqrt{\alpha} p_{13} \quad (24)$$

2.2 $0 < \alpha < 3\gamma$ 情形

当 $2\gamma < \alpha < 3\gamma$ 时, 方程(1)有 5 个奇点: 不稳定奇点 O , 稳定奇点 A_1 与 A_2 , 以及鞍点 A_3 与 A_4 . 而当 $0 < \alpha < 2\gamma$ 时, 方程(1)仍然只有这 5 个奇点, 只不

过 O 变为鞍点, A_3 与 A_4 变为不稳定奇点. 当 $2\gamma < \alpha < 3\gamma$ 时, 记

$$r = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha-3\gamma}{2\gamma-\alpha}} \exp\left[-\frac{2\gamma(\alpha-\gamma)}{D}\right] \quad (25)$$

当 $0 < \alpha < 2\gamma$ 时, 记

$$r = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\gamma)}}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma-\alpha}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2D}\right) \quad (26)$$

则类似于 $\alpha > 3\gamma$ 情形的推导, 我们得到的前三阶易感性依次为

$$\chi^{(1)}(\Omega) = \frac{8\alpha}{D} \frac{r}{2r-i\Omega} \quad (27)$$

$$\chi^{(2)}(\Omega) = 0 \quad (28)$$

$$\chi^{(3)}(\Omega) = \frac{4\sqrt{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{D}\right)^3 \left(\frac{r}{6} - \frac{r^2}{2r-i\Omega}\right)}{2r-3i\Omega} \quad (29)$$

3 信噪比的推导

对于弱周期力, 定义输出响应的第 n 次谐波的信噪比为:

$$R^{(n)} = \frac{1}{4} \frac{A^{2n} |\chi^{(n)}(\Omega)|^2}{Q^0(n\Omega)} \quad (30)$$

其中 $Q^0(n\Omega)$ 是系统 (2) 在无周期扰动时的总体响应 $u(t)$ 的谱密度, 通常称作波动谱密度. 这里考察一次谐波随机共振所定义的信噪比 (对应于式 (30) 中 $n=1$ 的情形)^[6] 被推广到了高次谐波的情形.

在弱噪声的作用下, 无周期力扰动的系统 (2) (即 $A=0$ 时) 除了在不同稳态之间发生些许的随机跃迁之外, 主要是在稳定奇点 (或势阱底部) 附近波动. 按文献^[6] 中的近似处理, 在 $\alpha > 3\gamma$ 时, 波动谱密度为:

$$Q^0(\omega) = \sum_{i=1}^4 p_{i0} Q_i^{(0)}(\omega) + Q_r^{(0)}(\omega) \quad (31)$$

其中 $Q_i^{(0)}(\omega)$ 是由稳定奇点 A_i 附近的小波动形成的, 可由方程 (1) 在该点的线性化方程求得, $Q_r^{(0)}(\omega)$ 是由不同稳态之间的概率形成的.

把方程 (1) 在平衡点 $A_1(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$ 线性化, 并令 $x_1 = x - \sqrt{\alpha}$, $y_1 = y - \sqrt{\alpha}$, 得

$$\dot{x}_1 = -(2\alpha + \gamma)x_1 + \gamma y_1 + \xi_1(t) \quad (32)$$

$$\dot{y}_1 = \gamma x_1 - (2\alpha + \gamma)y_1 + \xi_2(t)$$

根据随机振动理论的实模态分析方法以及平均运算与积分运算的可交换性, 得到系统 (32) 的输出 x_1 与 y_1 的自相关函数和互相关函数

$$\begin{aligned} E[x_1(t+\tau)x_1(t)] &= E[y_1(t+\tau)y_1(t)] \\ &= \frac{D}{4\alpha} e^{-2\alpha|\tau|} + \frac{D}{4(\alpha+\gamma)} e^{-2(\alpha+\gamma)|\tau|} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E[x_1(t+\tau)y_1(t)] &= E[y_1(t+\tau)x_1(t)] \\ &= \frac{D}{4\alpha} e^{-2\alpha|\tau|} - \frac{D}{4(\alpha+\gamma)} e^{-2(\alpha+\gamma)|\tau|} \end{aligned} \quad (34)$$

进一步得

$$Eu(t+\tau)u(t) = 4\alpha + \frac{D}{\alpha} e^{-2\alpha|\tau|} \quad (35)$$

对式 (35) 做傅立叶变换可得,

$$Q_1^{(0)}(\omega) = 8\alpha\pi\delta(\omega) + \frac{4D}{4\alpha^2 + \omega^2}$$

类似可得

$$\begin{aligned} Q_2^{(0)}(\omega) &= Q_1^{(0)}(\omega) \\ Q_3^{(0)}(\omega) &= Q_1^{(0)}(\omega) = \frac{4D}{4(\alpha-3\gamma)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (36)$$

又由文献^[6] 可知

$$Q_0^{(n)}(\omega) = \frac{4\alpha r_1 r_2}{\pi(r_1 + r_2)[(r_1 + r_2)^2 + \omega^2]} \quad (37)$$

把式 (35)、(37) 代入式 (36), 得:

$$\begin{aligned} Q^0(\omega) &= \frac{r_2}{r_1 + r_2} \left[8\alpha\pi\delta(\omega) + \frac{4D}{4\alpha^2 + \omega^2} \right] + \\ &\quad \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{4D}{4(\alpha-3\gamma)^2 + \omega^2} + \\ &\quad \frac{4\alpha r_1 r_2}{\pi(r_1 + r_2)[(r_1 + r_2)^2 + \omega^2]} \end{aligned} \quad (38)$$

在 $0 < \alpha < 3\gamma$ 时, 同理可得

$$Q^0(\omega) = 8\alpha\pi\delta(\omega) + \frac{4D}{4\alpha^2 + \omega^2} + \frac{8\alpha r}{\pi(4r^2 + \omega^2)} \quad (39)$$

至此, 在式 (38)、(39) 中, 令 $\omega = n\Omega$, 则得到式 (30) 中的 $Q^0(n\Omega)$, 将之代入式 (30) 即得到信噪比的表示式.

4 双阱薛罗格模型的随机共振和高次谐波随机共振

由前面的近似导出的信噪比给出双阱薛罗格模型的一次和三次谐波的随机共振曲线, 如图 2~3 所示. 为了检查解析近似结果的适用性, 图 2 也给出了直接模拟随机微分方程^[18] 得到的一次谐波的结果. 对于所考虑的参数, 在噪声强度 D 不十分靠近 0 时, 由图 2 可见解析近似的信噪比与数值模拟的信噪比对噪声强度的依赖性的定性特征基本一致. 峰的位置所对应的噪声强度也相差很小. 而在噪声强度很靠近 0 时, 解析结果与数值模拟结果相差很大,

其原因在于基于速率方程方法给出的解析敏感性只考虑了势阱之间的概率跃迁,但当噪声强度很小时,阱内振动占主要地位,相应的信噪比就很大.还注意到,由于所考虑的系统是对称的,解析导出的二次谐波的功率谱放大因子恒为 0,但数值模拟的二次谐波的幅值曲线却呈现出非单调的类似于随机共振的

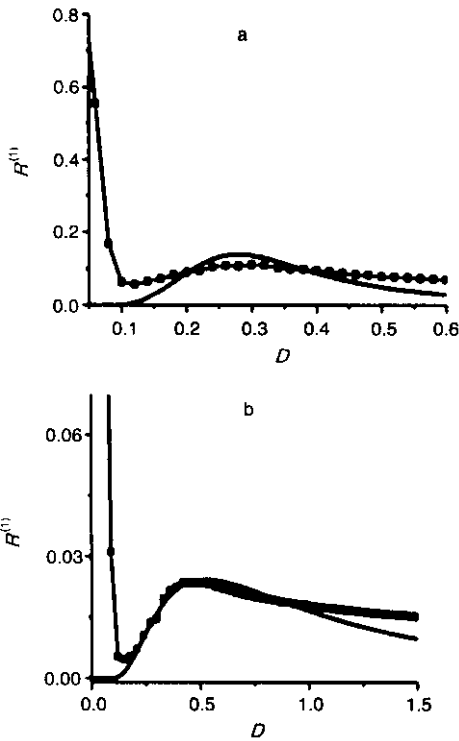


图 2 解析推导与数值模拟(重新标度的) (■)得到的一次谐波的信噪比

Fig. 2 The comparison between analytic and rescaled numerical signal-to-noise ratios of the first-order harmonic $\alpha=1.5, A=0.1, \Omega=0.02\pi, \gamma: (a) 0.3, (b) 0.6.$

特征结构,如图 4.我们认为后者产生误差的原因可能在于数值模拟时把无穷带宽的高斯白噪声进行了有限频率截断,从而导致实际作用于系统(2)的噪声并不是理想的高斯白噪声,而是相当于子系统除了受理想高斯白噪声作用之外还受到一个偏置的影响,也可能是由信号的高次谐波与背景噪声不太容易区分所造成的.图 4 也说明基于数值模拟并不易验证由 Floquet 理论给出的弱信号高次谐波的信噪比.

5 结 论

基于速率方程方法解析给出了量化薛罗格双匣模型的前三次谐波的随机共振的信噪比.对于所考

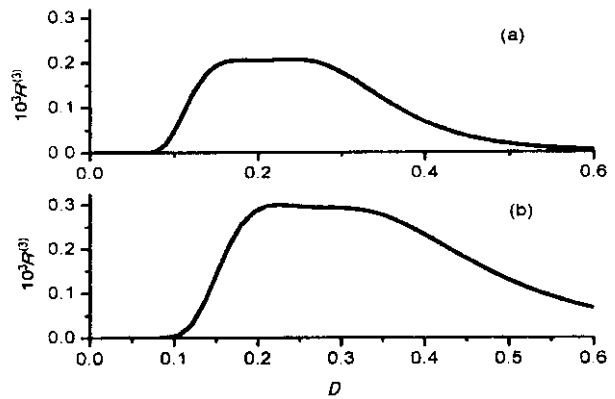


图 3 解析推导得到的三次谐波的信噪比

Fig. 3 The analytic signal-to-noise ratio of the third-order harmonic $\alpha=1.5, A=0.1, \Omega=0.02\pi, \gamma: (a) 0.3, (b) 0.6.$

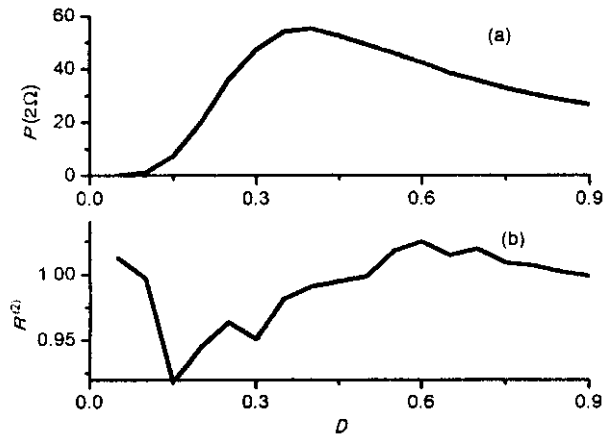


图 4 (a)数值模拟得到的功率谱密度在二次倍频处的演化; (b)数值模拟得到的二次谐波的信噪比

Fig. 4 (a) The power spectral density numerically observed at the second-order harmonic frequency via noise intensity; (b) The SNR numerically observed at the second-order harmonic frequency via noise intensity. $\alpha=1.5, A=0.1, \Omega=0.02\pi, \gamma=0.3.$

虑的参数情形,所得结果与数值模拟结果在一次谐波意义上具有定性的一致性,说明速率方程方法对于研究弱周期力驱动的随机多维多稳系统的随机共振也是有用的.研究还指出,虽然理论上只有奇次谐波才会表现出随机共振,但实际的数值模拟却可能导致偶次谐波也表现出随机共振.希望本工作能够为化学实验方面提供一些参考.

参 考 文 献

[1] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, et al. *Reviews of Modern Physics*, 1998, **70**: 223

- [2] McNamara B, Wiesenfeld K. *Phys. Rev. E*, 1989, **62**: 1869
- [3] Bartussek R, Hänggi P, Jung P. *Phys. Rev. E*, 1994, **49**: 3930
- [4] Hu Gang (胡岗). Stochastic Force and Nonlinear System (随机力与非线性系统), Shanghai (上海): Shanghai Science and Technology Press (上海科技教育出版社), 1994.
- [5] Neiman A, Schimansky-Geier L. *Phys. Lett. A*, 1995, **197**: 379
- [6] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E, *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**: 2985
- [7] Kang Yanmei (康艳梅), Xu Jianxue (徐健学), Xie Yong (谢勇). *Acta Phys. Sin.* (物理学报), 2003, **52**: 802
- [8] Dykman M I, Luchinsky D G, Mannella R, *et al.* *J. Stat. Phys.*, 1993, **70**: 479
- [9] Stocks N G, Stein N D, McClintock P V E. *J. Phys. A*, 1993, **26**: L385
- [10] Douglass J, Wilkens L, Pantazelou E, *et al.* *Nature*, 1993, **365**: 337
- [11] Longtin A. *J. Stat. Phys.*, 1993, **70**: 309
- [12] Marino F, Giudici M, Barland S, *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**: 040601
- [13] Guderian A, Decher G, Zeyer K P, *et al.* *J. Phys. Chem.*, 1995, **100**: 4437
- [14] Xin Houwen (辛厚文). *Chin. J. Chem. Phys.* (化学物理学报), 2000, **13**: 388
- [15] Mao X M, Sun K, Ouyang Q. *Chin. Phys.*, 2002, **11**: 1106
- [16] Evstigneev M, Pankov V, Prince R H. *J. Phys. A*, 2001, **34**: 2595
- [17] Gardiner C W, Handbook of Stochastic Methods for Physics Chemistry and Natural Sciences, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [18] Ronald F F, Gatland I R, Roy R. *Phys. Rev. A*, 1988, **38**: 5938