

周期扰动位相对化学振荡的调制效应*

吕翎**, 李钢

(辽宁师范大学物理系, 大连 116029)

摘要: 由 Rossler 反应系统的理论模型出发, 构造一种具有外部周期扰动的新动力学系统, 并采用逆算符法和数值分析法研究该系统的振荡态在周期扰动调制下的动力学行为. 结果表明, 在周期扰动的调制下, 系统的状态由单周期振荡态(1P)变为周期 $2(2P)$ 、周期 $4(4P)$ 等多周期振荡态以及混沌态. 扰动位相是系统呈现上述多种演化模式的控制参数, 在扰动位相不同的数值区间, 系统呈现的演化模式不同, 而且扰动位相数值的微小改变, 还影响每种演化模式的内部结构.

关键词: Rossler 系统; 周期扰动; 调制; 化学振荡; 混沌

中图分类号: O643 文献标识码: A

Modulation Effect of Periodic Phase to Chemical Oscillation*

Lü Ling**, Li Gang

(Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029)

Abstract Based on the theoretical model of Rossler reaction system, a new dynamical system under external periodic perturbation modulation is constructed. The dynamical behavior of oscillatory state in the new system is investigated by using of the inverse operator method and the numerical analysis method because the inverse operator method is of high precision, quick convergence for the solution of nonlinear equations. The results show that the dynamical behavior of the system takes place notable changes and takes on many new evolution patterns under the external modulation of the periodic perturbation. For examples, the single periodic oscillation in the system which perturbation is not added is evolved to multi-period oscillatory states, such as period two(2P), period four(4P), ..., 2^n P and chaos when the system is modulated by periodic perturbation. It is found that the parameter of the perturbation phase(PP) is the most sensitive and the highest efficient in the modulation process if only one parameter is modulated while others are kept constant. In the same time, the new evolution patterns of the system (multi-period oscillatory state and chaos) will take on in the different numerical regions of the PP, and the small number change of the PP can influence internal construction of each evolution pattern although evolution patterns of the system don't change.

Key words Rossler system, Periodic perturbation, Modulation, Chemical oscillation, Chaos

1 引言

目前, 各种化学反应系统呈现振荡和混沌等非线性现象, 已经成为化学以及相关领域研究的热点和前沿课题^[1-6]. Rossler 反应系统是研究化学振荡

的典型例子之一^[7]. 理论研究可知, Rossler 反应系统在某参数区间内唯一的演化模式为单周期振荡态. 本工作对该系统施加外部周期扰动信号, 采用逆算符法和数值分析法研究了新构造的系统在扰动调制下的动力学行为. 研究结果表明, 在周期扰动的影

* 国家自然科学基金资助项目(10175032). ** 通讯联系人, E-mail: lshdg@sina.com.cn

收稿日期: 2002-05-18; 修回日期: 2002-10-15.

响下,系统的动力学行为发生了变化,呈现出多种新的演化模式,由未加扰动的单周期振荡态演变为周期 2、周期 4、...、 2^np 的多周期振荡态以及混沌态. 固定系统的其它参数,仅保留其中的一个参数进行调制,发现扰动位相这一参数在调制过程中最灵敏有效. 系统呈现多周期振荡态以及混沌态这些新的演化模式分别对应于扰动位相的不同数值区间. 在某一位相区间微调位相数值,虽然不改变系统的演化模式,但使每种模式的内部结构发生了改变. 尽管有报道周期扰动力对非线性系统的调制作用,但仅限于研究扰动幅度对系统的影响,而扰动位相对 Rossler 系统的调制效应迄今未有报道.

2 周期扰动下的 Rossler 系统

Rossler 反应系统的理论模型动力学方程为^[7]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + by \\ \frac{dz}{dt} = c + (x - \mu)z \end{cases} \quad (1)$$

这是一个三变量非线性微分方程组, b 、 c 、 μ 为参数. 当参数 b 、 c 、 μ 分别取值为 0.2、0.2 和 2.6 时,由稳定性理论分析可知(1)式所描述的系统是不稳定的. 不稳定的非线性系统的演化模式可以通过求系统的 Lyapunov 指数和功率谱来判定. 作出该系统的最大 Lyapunov 指数 λ 随参数 μ 变化的关系曲线(图 1)以及相应的功率谱(图 2),发现 b 、 c 、 μ 取上述数值时,最大 Lyapunov 指数不存在正值且功率谱是分立的单峰,可以判定系统的演化模式是周期振荡态,即极限环解,作出(1)式在 $x-y$ 平面内的极限环,见图 3.

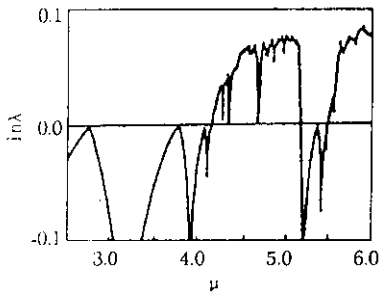


图 1 Lyapunov 指数曲线
Fig. 1 Lyapunov exponent curve

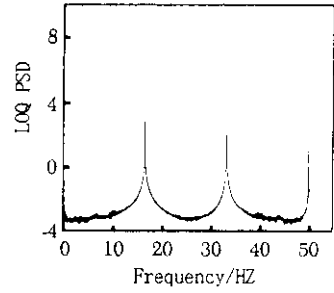


图 2 功率谱密度
Fig. 2 Power spectrum density

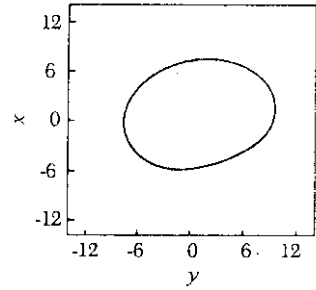


图 3 (1p)周期轨道
Fig. 3 (1p)periodic orbit

对(1)式所描述的 Rossler 系统施加周期扰动,得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z + a \cos \varphi \\ \frac{dy}{dt} = x + by \\ \frac{dz}{dt} = c + (x - \mu)z \end{cases} \quad (2)$$

其中, a 为归一化的扰动幅度; φ 为扰动位相, $\varphi = \omega t$ (ω 为频率). 在施加了这种周期扰动后(2)式所描述的系统的动力学演化模式将出现多种新形式.

3 结果分析与讨论

由于逆算符法求解非线性方程比其它方法精度高、收敛性快^[8]. 所以,本工作以逆算符法求解方程(2)式的逼近解析表达式. 以一维方程为例说明求解方法. 设非线性方程可以表示为

$$Fy = X_\omega(t) \quad (3)$$

其中, F 为非线性算符,它可以分解为线性和非线性部分,即

$$F = L + R + N$$

其中, L 为方程中最高阶求导的线性可逆算子; R 为其余的线性算子; N 为非线性部分; $X_\omega(t)$ 为方程的非齐次部分. 于是,方程(3)变为

$$Ly + Ry + Ny = X_\omega(t) \quad (4)$$

由于 L 是可逆的, 于是用逆算符 L^{-1} 作用于(4)式等号两边, 得

$$y = -L^{-1}Ry - L^{-1}Ny + L^{-1}X_\omega \quad (5)$$

令 $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \beta^n, Ny = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \beta^n \quad (6)$

(6)式中的 β 是为方便分组引进的一个参数, 将式(5)参数化, 得

$$y = L^{-1}X_\omega - \beta L^{-1}Ry - \beta L^{-1}Ny \quad (7)$$

将(6)式代入(7)式并比较方程两边的相同次幂项, 得

$$\begin{cases} y_0 = \Psi_0 + L^{-1}X_\omega \\ y_{n+1} = -L^{-1}Ry_n - L^{-1}d_n \end{cases} \quad (8)$$

其中 Ψ_0 满足 $L\Psi_0 = 0$ 及初始条件. 这样便得到非线性方程(3)的逼近解析解

$$K = \sum_{i=0}^n y_i \quad (9)$$

将上述逆算符法用于求解新构造的非线性系统(2)式. 令(2)式中

$$\begin{cases} L = \frac{d}{dt}, R_{11} = -1, R_{12} = -1, \\ R_{21} = 1, R_{22} = b, R_{31} = c, \\ R_{32} = -\mu, Nz = xz = \sum d_n \\ X_\omega(t) = a \cos \varphi = a \cos \omega t, \end{cases} \quad (10)$$

这样(2)式就可以写成

$$\begin{cases} Lx = R_{11}y + R_{12}z + X_\omega(t) \\ Ly = R_{21}x + R_{22}y \\ Lz = R_{31}x + R_{32}z + Nz \end{cases} \quad (11)$$

等式两边用逆算符作用, 并将方程参数化后得

$$\begin{cases} x_{n+1} = L^{-1}R_{11}y_n + L^{-1}R_{12}z_n + L^{-1}X_\omega \\ y_{n+1} = L^{-1}R_{21}x_n + L^{-1}R_{22}y_n \\ z_{n+1} = L^{-1}R_{31}x_n + L^{-1}R_{32}z_n + L^{-1}d_n \end{cases} \quad (12)$$

这里 d_n 的具体表达式为

$$\begin{cases} d_0 = x_0 z_0 \\ d_1 = x_0 z_1 + z_0 x_1 \\ d_2 = x_0 z_2 + z_0 x_2 + 2x_1 z_1 \\ \dots \end{cases} \quad (13)$$

由(12)式和(13)式, 就可以在计算机上自动导出 n 阶逼近解 $K_i (i = 1, 2, 3)$, 分别表示 x, y, z 的逼近解.

以逆算符法的结果作为数值计算的公式, 从计算机上完成在不同的位相区间内系统的演化模式的数值模拟. 固定参数 b, c, μ 仍为原数值不变, 仅调节位相 φ 的数值, 当 φ 取至 0.1 时, 发现受扰动的

系统的 Lyapunov 指数虽没有出现正值, 但曲线的形状还是发生了变化, 相对应的功率谱虽然仍是分立的尖峰, 但尖峰的数目与未加周期扰动的系统也有了明显的差别, 计算机数值计算结果发现此时系统处于周期 $2p$ 振荡态(图 4a).

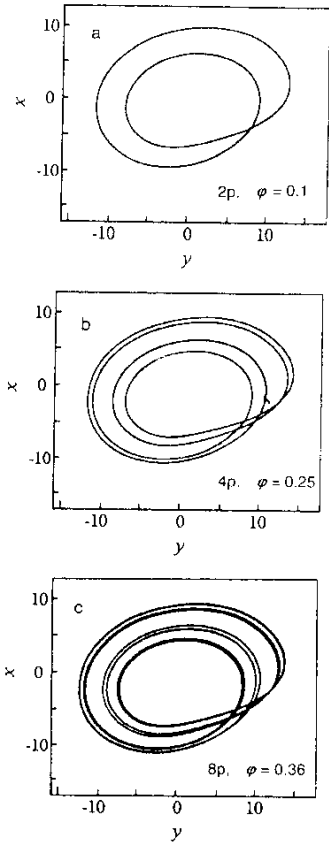


图 4 2p、4p、8p 周期轨道
Fig. 4 2p, 4p and 8p periodic orbit
 $a = 40, b = c = 0.2, \mu = 2.6$

逐渐增加位相 φ 的数值至 0.25 和 0.36 时, 计算机模拟出的轨道为周期 4(4p)和周期 8(8p)振荡态(图 4 b、c). 特别是当位相的数值增加至 0.6 时, 受扰动的 Rossler 系统的 Lyapunov 指数出现了正值, 相对应的功率谱中也出现了宽峰和噪声背景, 说明此时系统的动力学行为表现出新的演化模式. 这种演化模式不同于上述 $2^n p$ 振荡态, 它使方程(2)式的解具有了随机性, 此时系统所处的状态为混沌态(图 5).

实际上受周期扰动的系统(2)式所呈现的演化模式可以看成是两个系统耦合作用的结果, 其中之一是(1)式所表述的非线性系统, 另一个是(2)式中外加的周期扰动部分 $a \cos \omega t$, 它可以看作是一个线性简谐振荡系统. 两个系统耦合作用的强弱是通过

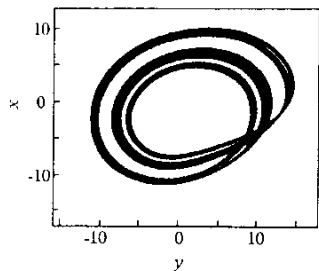


图5 混沌吸引子

Fig.5 Chaotic attractor

$$a = 40, b = c = 0.2, \mu = 2.6, \varphi = 0.6$$

调节控制参数位相 $\varphi(\omega t)$ 来实现的. 当两个耦合系统之一弱到整个系统可以看作是两个相对独立的系统, 或者其中之一强到占主导地位时, 系统都将处于 $2^n p$ 周期振荡态; 只有当两个系统强弱相当时, 两组振荡相互影响强烈, 系统的运动状态才会复杂化而出现混沌态.

在数值模拟中还发现, 在系统出现 $2^n p$ 振荡态以及混沌态时, 每一种状态和位相这一控制参数值并不是一一对应, 而是每种演化模式对应于位相的一个数值区间, 位相在此区间内取值, 得到的演化模

式虽然不变, 但每种模式的图形形状和内部结构会出现差异. 另外, 固定新构造的动力学系统的其它参数不变, 仅改变和调节其中的一个参数, 用以比较受周期扰动的系统中各参数的调制效果, 发现仅仅位相参数调制系统时, 其数值变化区间不是很大就能呈现上述多种演化模式, 而其它参数(如幅度 a)作为控制参数时, 即使参数数值变化区间很大, 仍难以实现上述演化模式的调制, 说明位相对 Rossler 反应系统实施周期扰动过程中是十分敏感有效的控制参数. 预计这种周期扰动位相对化学振荡的调制效应将在信息处理领域(如信息的加密和解密)中得到应用.

参 考 文 献

- [1] Parmananda P, Jiang Y. *J. Phys. Chem.*, 1998, **102**: 4523
- [2] Strizhak P E, Kawczynski A L. *J. Phys. Chem.*, 1995, **99**: 10830
- [3] Hauck T, Schneider F W. *J. Phys. Chem.*, 1994, **98**: 2072
- [4] Lu Ling(吕翎). *Chemical Research in Chinese Universities* (高等学校化学研究), 2001, **17**: 311
- [5] Li Xueliang(李学良), He Jianbo(何建波), et al. *Chin. J. Chem. Phys.* (化学物理学报), 2002, **15**: 97
- [6] Yang Lingfa(杨灵法), Hou Zhonghuai(侯中怀), et al. *Chin. J. Chem. Phys.* (化学物理学报), 1999, **12**: 171
- [7] Epstein I R. *J. Phys. Chem.*, 1984, **88**: 187
- [8] Adomian G. *Computers Math. Applic.*, 1991, **21**: 101