

平行平板间电流变液非零压力 梯度 Couette 流动的稳定性分析*

彭 杰, 朱克勤**, 席葆树

(清华大学工程力学系 北京 100084)

摘 要: 采用 Rajagopal 和 Wineman 所提出本构方程, 对电流变液在二维平行平板间非零压力梯度 Couette 流动的线性稳定性问题进行研究。通过分析和数值计算发现, 任何壁面运动都将使流动稳定性增强。在外加电场存在的情况下, 电流变液效应也将使流动稳定性增强。

关键词: 电流变液; 稳定性; O-S 方程

中图分类号: O373 文献标识码: A

1 引 言

在流体动力学研究中, 稳定性一直是关注的热点问题之一。通过稳定性分析, 可以了解流动对小扰动的响应。若扰动随时间减弱, 流动是稳定的, 反之则认为流动不稳定。关于电流变液流动稳定性的研究目前还处在起步阶段, 最近 Gupta 分析了电流变液平板 Poiseuille 流动的线性稳定性问题^[1], 他采用 Rajagopal 和 Wineman 提出的电流变液的本构方程^[2], 通过基于 B-样条的 Galerkin 方法求解 O-S 方程, 得到了流动稳定性的中性曲线。本文将 Gupta 的研究延拓到板壁运动的情况, 以了解板壁运动对流动稳定性所产生的影响。

2 物理数学模型

使用 Rajagopal 和 Wineman 提出的电流变液的本构方程^[2]

$$\begin{aligned} \tau^* = & \alpha_1^* E^* \otimes E^* + \alpha_2^* D^* + \alpha_3^* D^{*2} + \alpha_4^* (D^* E^* \otimes E^* + E^* \otimes D^* E^*) \\ & + \alpha_5^* (D^{*2} E^* \otimes E^* + E^* \otimes D^{*2} E^*) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, τ^* 为剪切应力张量; E^* 为外加电场强度; D^* 为剪切应变率张量; α_i^* ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 为材料有关的系数, 其中

$$\alpha_2^* = \alpha_{20}^* + \frac{\alpha_{21}^*}{\Phi(\Pi_D)}, \quad \alpha_4^* = \alpha_{40}^* + \frac{\alpha_{41}^*}{\Phi(\Pi_D)} \quad (2)$$

α_{20}^* 、 α_{40}^* 、 α_{21}^* 、 α_{41}^* 均为常数; $\Phi(\Pi_D) = (\delta_1 + \delta_2 \sqrt{4\Pi_D})^m$, δ_1 、 δ_2 为常数; Π_D 为剪切应变率张量不变量。当 α_i^* ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 取不同值时, 本构方程 (1) 可分别对应如下流体:

当 $\alpha_i^* = 0$, $i = 1, 3, 4, 5$, $\alpha_{21}^* = 0$ 时, 为牛顿流体;

当 $\alpha_i^* = 0$, $i = 1, 3, 4, 5$, α_{21}^* 、 α_{40}^* 为常数时, 为带有调整因子的 Bingham 流体;

* 国家自然科学基金 (19834020) 和清华大学基础研究基金 (JC2000037) 资助项目。

** 通讯联系人, Email: zhukq@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2001-08-20; 修回日期: 2001-09-20。

当 α_i^* ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 均不为零, 为电流变液。

物理问题如图 1 所示, 已知上板运动速度 U_c 和沿 x 方向的压力梯度 $\partial p/\partial x$, 外加电场 E_0 沿 y 方向, 板间距 $2H$ 。取特征长度 H 、特征压力 $p_0 =$

$\left(\frac{\alpha_{20}^* + \alpha_{40}^* E_0^2}{2H}\right)^2$ 、特征速度 $U_0 = \frac{\alpha_{20}^* + \alpha_{40}^* E_0^2}{2H}$, 可得无量

纲连续方程和动量方程:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau \end{aligned} \quad (3)$$

无量纲速度边界条件

$$\begin{aligned} u(1) &= Re_c, \quad u(-1) = 0; \\ u(-1) &= 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $Re_c = U_c/U_0$ 定义为 Couette 雷诺数。方程(1)无量纲化并代入动量方程(3)中, 在稳态情况下沿 y 方向一次积分并化简得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{BI}{(\delta_1 + \delta_2 \partial u/\partial y)^m} \frac{\partial u}{\partial y} = -2Re_p y + C \quad (5)$$

其中, $BI = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{41}}{2}$ 定义为 Bingham 数; α_{21} 、 α_{41} 为方程(1)无量纲化所得系数; $Re_p = -\frac{\partial p/\partial x}{2}$ 定义为 Poiseuille 雷诺数; C 为积分常数。由(5)式及边界条件(4)即可求得稳态基本流场的速度分布。

根据线性小扰动理论, 令 $u = \bar{u} - \epsilon \frac{\partial \Psi_p}{\partial y}$, $v = \bar{v} + \epsilon \frac{\partial \Psi_p}{\partial x}$, $p = \bar{p} + \epsilon p'$, 其中 $\epsilon \ll 1$, $\Psi_p(x, y)$ 为扰动量, 可定义为

$$\Psi_p(x, y) = \Psi(y) \exp[i\alpha(x - ct)], \quad p' = p(y) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (6)$$

将上述各式代入方程(3), 忽略高阶小量, 可得线性稳定性的 O-S 方程

$$\begin{aligned} i\alpha(\bar{u} - c) \{ D^2 \Psi - \sigma^2 \Psi \} - i\sigma \Psi D^2 \bar{u} \\ = (D^4 \Psi - 2\sigma^2 D^2 \Psi + \sigma^4 \Psi) + BI \delta [\eta (D^4 \Psi - 2\sigma^2 D^2 \Psi + \sigma^4 \Psi) \\ + 2D\eta (D^3 \Psi - \sigma^2 D\Psi) + D^2 \eta (D^2 \Psi + \sigma^2 \Psi)] + \delta_2 BI \eta [D\bar{u} (D^4 \Psi + \sigma^4 \Psi) \\ + D^3 \bar{u} (D^2 \Psi + \sigma^2 \Psi) + 2D^2 \bar{u} D^3 \Psi] (1 - m) - \delta_2 BI \eta 2\sigma^2 (D^2 \Psi D\bar{u} + D^2 \bar{u} D\Psi) \\ \times (1 + m) + \delta_2 BID^2 \eta D\bar{u} (D^2 \Psi + \sigma^2 \Psi) (1 - m) - \delta_2 BID^2 \eta [\sigma^2 D\Psi D\bar{u} (1 + m) \\ - (D\bar{u} D^3 \Psi + D^2 \bar{u} D^2 \Psi + \sigma^2 D^2 \bar{u} \Psi) (1 - m)] \\ - i\sigma EI [D^2 \bar{u} (D^2 \Psi + \sigma^2 \Psi) + D\bar{u} (D^3 \Psi + \sigma^2 D\Psi)] \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $EI = \alpha_5$, $\eta = (\delta_1 + \delta_2 D\bar{u})^{-m-1}$, $D^q = d^q/dy^q$, $q=0, 1, 2, 3, 4$ 。相应边界条件为

$$\Psi(\pm 1) = D\Psi(\pm 1) = 0 \quad (8)$$

令 $\Psi = \sum a_n f_n(y)$, 其中 $f_n(y) = (1 - y^2)^{1/2} T_n(y)$, T_n 为第一类 Chebyshev 多项式, 再令

$$D^q \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n^{(q)}(y) \quad (9)$$

将(9)式带入(7)式中并化简, 即可将问题转化为复数矩阵的广义特征值问题。通过配置点法求解特征值问题即可获得描述流动稳定性的中性曲线, 并着重讨论无量纲参数 Re_c 、 BI 、 EI 对流动稳定性的影响。

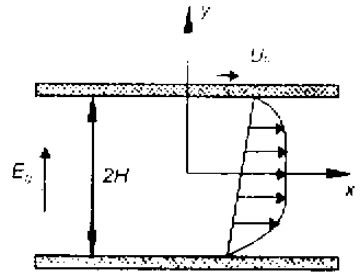


图 1 平板间非零压力梯度的 Couette 流动
Fig.1 Nonzero pressure gradient Couette flow

3 结果分析

3.1 牛顿流体的稳定性

取 $BI = EI = 0$, 流动的稳定性仅受 Re_c (表示上板运动的大小和方向) 的影响。图 2 所示为计算所得流动稳定性的中性曲线。当 $Re_c = 0$ 时, 上板静止, 此时临界 Poiseuille 雷诺数为 5772, 与 Orszag 所得结果一致^[3]; 当 $Re_c > 0$ 时, 上板沿 x 方向运动, 临界 Poiseuille 雷诺数随 Re_c 增大而增大, 流动稳定性增加; 当 $Re_c < 0$ 时, 上板沿 $-x$ 方向运动, 临界 Poiseuille 雷诺数随 Re_c 的减小而增大, 流动的稳定性依然增加。

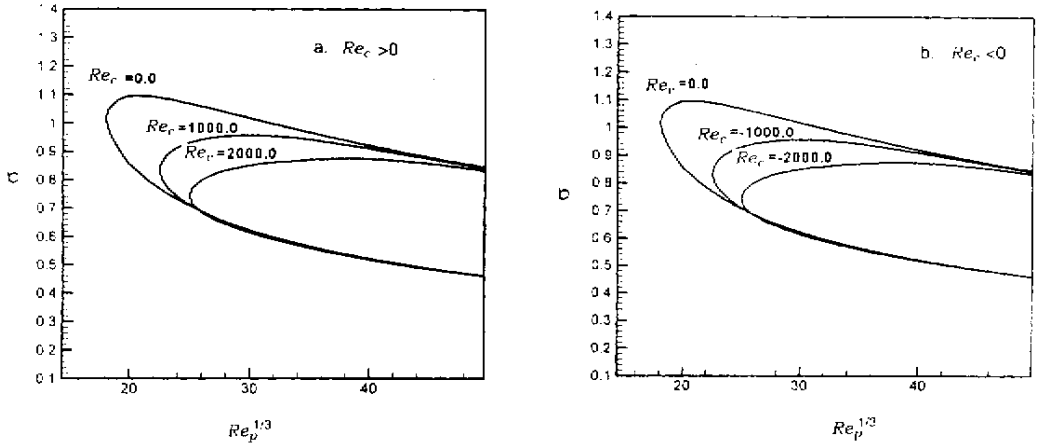


图 2 流动的中性曲线
Fig.2 Marginal stability curves

3.2 Bingham 流体的稳定性

取 $m = 1.0$ 、 $EI = 0$, 流动的稳定性将受到 BI 、 Re_c 的影响, 其中 BI 表示无量纲屈服应力。图 3a 为 $Re_c = 0$ 时流动中性曲线, 随 BI 不断增大, 临界 Poiseuille 雷诺数不断增大, 流动稳定性增加, 且发生失稳的波数也增大。图 3b 为不同 Re_c 、 BI 取值情况下流动稳定性的中性曲线, 从中可知 BI 、 Re_c 对流动稳定性具有不同的影响, $Re_c \neq 0$ 将使流动的临界 Poiseuille 雷诺数增加, 并且使发生失稳的区域缩小; $BI \neq 0$ 也将使流动的临界 Poiseuille 雷诺数增加, 并且使发生失稳的小扰动的波数增加。

3.3 流变液的稳定性

取 $m = 1.0$, EI 、 BI 均不为 0 , 流动的稳定性将受到 EI 、 BI 、 Re_c 的影响, 其中 EI 表示了电流变液本构方程中二阶应变率与电场相互作用, BI 仍可视作无量纲屈服应力; 图 4a 为 $BI = 100.0$ 、 $EI = \pm 0.0002$ 、 $Re_c = 0.0$ 情况下流动稳定性的中性曲线。当 $EI < 0$ 时, 流动稳定性增加, 失稳区域减小; 反之稳定性减弱, 失稳区域增大。图 4b 为 $BI = 100.0$ 、 $EI = \pm 0.0002$ 、 $Re_c = 1000.0$ 时流动的中性曲线, 由于 $Re_c \neq 0$ 时, 因此临界 Poiseuille 雷诺数增大, 且 $EI < 0$ 时流动稳定性增加, 反之减弱。

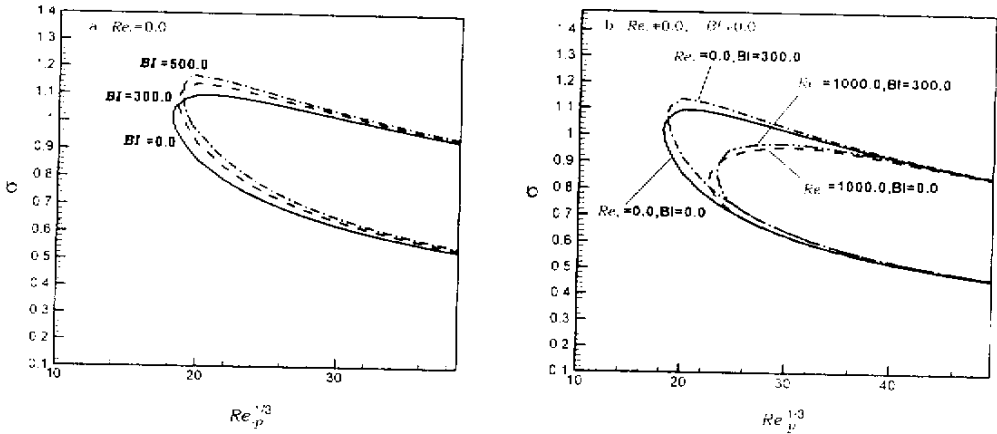


图 3 流动的中性曲线
Fig. 3 Marginal stability curves

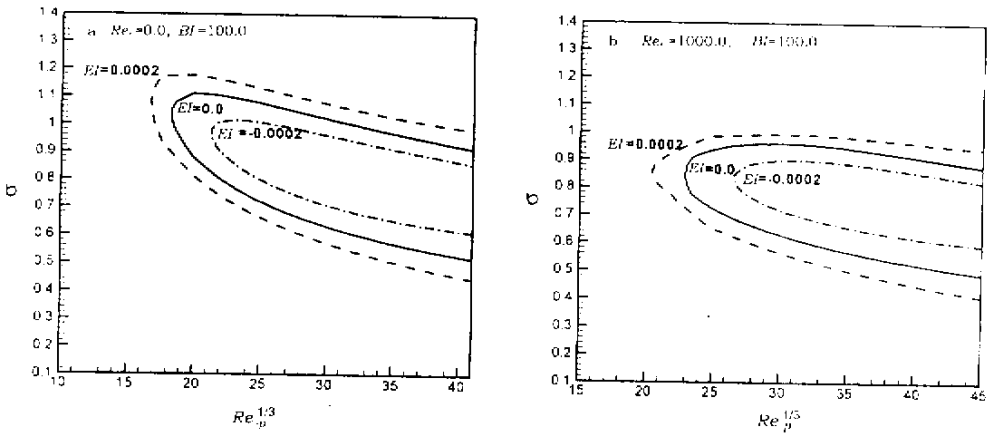


图 4 流动的中性曲线
Fig. 4 Marginal stability curves

4 结 论

本文对电流变液非零压力梯度 Couette 流动的稳定性进行了分析,得到如下结论:

1. 壁面运动 ($Re_c \neq 0$) 将使流动稳定性增加;
2. 屈服应力 ($BI \neq 0$) 将使流动的稳定性增加,并且使发生失稳的小扰动波数增大;
3. 本构方程的应变率二阶项中仅电场和应变率相互作用项对流动的稳定性有影响,并且 $EI > 0$ 使流动稳定性增加; $EI < 0$ 则使流动稳定性减小。

参 考 文 献

[1] Gupta G K. *International Journal of Non - Linear Mechanics*, 1999, **34** : 589
 [2] Rajagopal K R, Wineman A S. *Acta Mechanica*, 1992, **91** : 57
 [3] Orszag S A. *J. Fluid Mech.*, 1971b, **50** : 689

- [4] Meseguer A , Marques F. *J. Fluid Mech.* , 2000 , **402** : 33
[5] Ray R N , Samad A , Chaudhury T K. *Acta Mechanica* , 2000 , **143** : 155
[6] Frigaard I A , Howison S D , Sobey I J. *J. Fluid Mech.* , 1994 , **263** : 133

On the Stability of Nonzero Pressure Gradient Couette Flow of ER Fluid^{*}

Peng Jie , Zhu Keqin^{**} , Xi Baoshu

(*Department of Engineering Mechanics , Tsinghua University , Beijing 100084*)

Abstract A linearized stability analysis of the nonzero pressure gradient Couette flow of ER fluid has been performed. The constructive equation used here was established by Wineman and Rajagopal. After numerical evaluation , it comes that any motions of the boundary wall are shown to have a stabilizing effect. With the applied extra electric field , the effect of ERF can also enhance the stability.

Key words Electrorheological fluid , Stability , O – S equation

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (19834020) and fundamental research foundation of Tsinghua University (JC2000037).

** To whom correspondence should be addressed , Email : zhukq@tsinghua.edu.cn.