

# 两种体系中多重随机共振的噪声调控\*

张季谦, 辛厚文\*\*

(中国科学技术大学化学物理系, 合肥 230026)

**摘要:** 通过计算机模拟, 介绍一种新的方法来控制两种体系中的多重随机共振, 被控参数选为噪声的脉冲间隔或噪声强度。对于对称的二能级的量子耗散体系, 调节量子噪声则可以实现对量子多重随机共振的控制。另外还借用不同能级之间跃迁的观点来解释多重随机共振现象的形成机理。

**关键词:** (量子)多重随机共振; 控制; 噪声脉冲间隔; 能级跃迁

**中图分类号:** O231.2      **文献标识码:** A

## 1 前言

近年来, 人们发现有一类非线性体系, 当受到周期性的信号和随机力的扰动时, 会产生随机多重共振现象(SMR)<sup>[1]</sup>。对于该种体系而言, 作为噪声强度的函数, 输出信号的信噪比(SNR)会在不同的噪声值处呈现出多个极大值峰。在CO + O<sub>2</sub>的催化氧化反应体系中<sup>[2]</sup>, 不用外信号也可激发出随机二重共振, 其表现为在SNR曲线上, 由噪声诱导的相干内振荡的强度呈现出两个极值峰。

尤其引起人们注意的是, 目前, 在研究随机共振现象的领域中, 人们开始探讨如何改变相关的参数来实现对随机共振的控制。Inchiosa等人提出了一种用开环来调控SR的方案, 来提高或抑制输出信号谱的反应效果<sup>[3]</sup>。Francios观察到在无记忆效应的随机体系中, 对输入信号的相位加上噪声扰动, 可以极大地提高信号的传输能力<sup>[4]</sup>。人们还发现调节色噪声的相关时间则可以使SR具有记忆效应<sup>[5]</sup>。改变噪声的频宽也将有利于信噪比的提高<sup>[6-8]</sup>。利用噪声脉冲持续时间同样可以调制随机共振<sup>[9]</sup>。Kádár等人在亚激发媒介体系中实现了用噪声来支持波的传播<sup>[10]</sup>。不仅如此, 近年来的理论研究已经证明随机共振可在许多情况下产生<sup>[11-14]</sup>。

在本文中, 我们利用调节噪声的相关参数如脉冲间隔等来实现对多重随机共振的控制。

## 2 模型

本文所采用的模型之一, 其动力学方程可表述如下:

$$\frac{dx}{dt} = -Q(x, t)x + F_n(t) \quad (1)$$

$$Q(x, t) = -Q_0(x) + \alpha + A \cos(2\pi ft) \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金资助项目(No. 29892165)。

\*\* 通讯联系人, Email: nclxin@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2000-06-09; 修回日期: 2000-09-27。

考虑  $Q_0(x)$  为线性分段函数, 即:

$$Q_0(x) = \begin{cases} k_1 & |x| \leq c_1 \\ k_2 & c_1 < |x| \leq c_2 \\ k_3 & c_2 < |x| \leq c_3 \\ k_4 & c_3 < |x| \leq c_4 \\ k_5 & c_4 < |x| \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\Gamma(t)$  为高斯白噪声, 其统计平均和自相关函数分别满足  $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$  和  $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ ;  $D$  为噪声强度;  $f$  为输入信号的频率;  $\alpha$  为常数;  $A$  为外信号的振幅(具体参数值见表1)。为了考虑噪声脉冲间隔的作用, 我们采用的噪声  $\Gamma(t)$  是由具有一定的时间间隔及周期性的  $\delta$  尖峰序列组成, 即

$$\Gamma_n(t) = \Gamma(t)g_n(t), \quad g_n(t) = \begin{cases} 1 & n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \\ 0 & \text{其他时间} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $n$  为噪声的脉冲间隔, 相当于每经过  $n$  个积分步长对应的时间后才给系统施加一个噪声脉冲。

表1 模拟时所用的有关参数值(前两列数据引自文献<sup>[1]</sup>)

Table 1 Parameters in the model(parameters of front two columns follows Ref<sup>[1]</sup>)

$c_1 = 1.0$	$k_1 = 20$	$k_1' = 20$	$E_1$
$c_2 = 1.73$	$k_2 = -80$	$k_2' = -80$	$E_2$
$c_3 = 3.16$	$k_3 = 20$	$k_3' = 25$	$E_3$
$c_4 = 4.47$	$k_4 = -80$	$k_4' = -85$	$E_4$
$f = 5\text{Hz}$	$k_5 = 20$	$k_5' = 30$	$E_5$
$A = 100$	$\alpha = 121$		

在本文中, 我们对方程(1)~(4)利用标准的四阶龙格库塔法进行数值模拟(积分步长  $dt = 0.001$ , 总的积分时间为  $5000\text{ s}$ , 记录  $1 \times 10^5$  个数据结果)。并利用付立叶谱分析, 定性讨论噪声的脉冲间隔  $n$  对随机多重共振的影响。

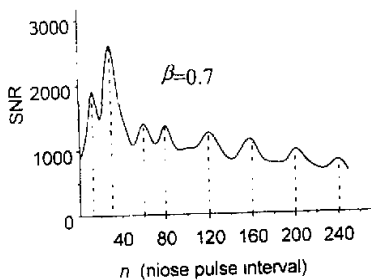


图1 信噪比 SNR 随脉冲间隔  $n$  变化关系  
Fig.1 SNR as evaluated from the fourier power spectra vs the noise pulse interval  $n$

### 3 结果与讨论

首先, 保持噪声强度  $D$  和其他参数不变, 我们得到输出信噪比随噪声脉冲间隔  $n$  变化的曲线, 如图1所示, 本文的信噪比  $SNR$  仍然采用文献[1]中的定义。从图1中很容易发现, 随着脉冲间隔  $n$  的变化, 共振曲线中信噪比  $SNR$  呈现一系列的极大值, 这些极大值峰的位置满足关系  $n = n_0 m$ , 并且  $(m = 1, 2, 3, \dots)$   $n_0 \approx 15, 30, 40, 50$  等。经过分析我们发现, 这些数  $n_0$  与本体系所用的势能  $U(x)$  的各能级之间的跃迁存在一定的对应关系(势能图见图

2)。在(3)式中的  $k_i$  取值为  $k_1 = k_3 = k_5 = 20$ ,  $k_2 = k_4 = -80$ , 由于  $k_i$  只有两个值, 不便观察五个能级之间的跃迁, 因此我们根据方程(3)给出的各段  $x$  对应的势能和参数  $k_i$  的关系, 用  $k_i'$  来代替  $k_i$ , 即用  $k_1' = 20$ ,  $k_2' = -80$ ,  $k_3' = 25$ ,  $k_4' = -85$ ,  $k_5' = 30$  对应于图 2 中的能级  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$ 、 $E_4$ 、 $E_5$ 。从  $x(t)$  的时间序列  $x$  可以得到参数  $k_i'$  随时间的变化。在图 3 中我们给出了  $n = 30m$ 、 $40m$  时的时间序列。图 3 表明, 当脉冲间隔  $n = 40$  时, 体系在能级  $E_1(k_1' = 20)$  和  $E_5(k_5' = 30)$  之间发生的跃迁几率要比在其它能级间跃迁几率来得大些, 因而在信噪比图上对应  $n = n_0 = 40$  处就会出现一个极大值峰。同时在与 40 成整数倍的许多  $n$  位置处也会出现峰值。同样道理, 当我们分别选取  $n_0 = 15$ 、 $30$ 、 $50$ 、 $70$  等值进行模拟时, 也观察到了类似的现象。

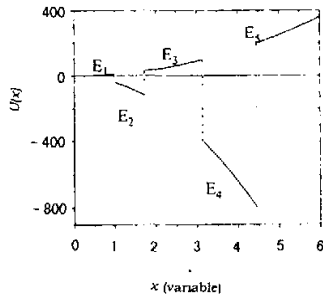


图 2 势能  $U(x)$  随  $x$  变化关系  
Fig. 2 Potential  $U(x)$  corresponding to the force  $-Q(x)x$  vs  $x$

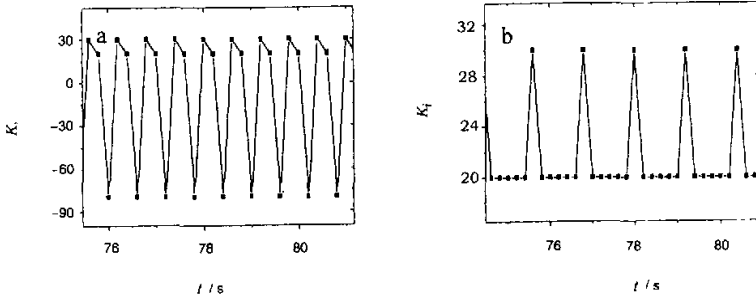


图 3 参数  $k_i'$  随时间变化的关系  
a.  $\beta = 0.5$ , 噪声间隔  $n = 30m$ ; b.  $\beta = 0.5$ , 噪声间隔  $n = 40m$ 。

Fig. 3 Time series of  $k_i'$  with parameters listed in Table 1  
a.  $\beta = 0.5$ , noise pulse interval  $n = 30m$ ; b.  $\beta = 0.5$ , noise pulse interval  $n = 40m$ ;  
The solid lines between two points are meant as guides to the eyes.

其次, 我们还可以在量子体系中调节量子噪声来实现对量子多重随机共振 (QMSR) 的控制。这个模型是一个对称的双能级体系, 其总的哈密顿量可以表示为<sup>[15]</sup>:

$$\hat{H} = -\hbar\Delta_0\hat{\sigma}_x + \sum_i \hbar\omega_i a_i a_i^\dagger + \sum_i s_0 k (a_i + a_i^\dagger) \hat{\sigma}_z + V_0 \cos(\omega t) \hat{\sigma}_z \quad (5)$$

这里背景噪声被描述为一系列的谐振子的集合,  $\hat{\sigma}_i$ 's 为泡利矩阵;  $a_i$  和  $a_i^\dagger$  为噪声变量的产生和消灭算符;  $k$  为耦合常数;  $V_0 \cos(\omega t)$  为外加的周期场。为了使问题便于处理, 我们假设背景噪声可以用高斯型的噪声来表示, 它满足如下条件:

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle_\beta = \gamma\beta^{-1}\delta(t-t')$$

式中,  $\gamma$  为摩擦系数;  $\beta = (k_B T)^{-1}$ 。利用自旋算符的特征和 Novikov 理论<sup>[16]</sup>, 我们可以得到自旋变量的统计平均值的变化率:

$$\langle \dot{\sigma}_x \rangle = -2\gamma\beta \hbar^{-1} \langle \sigma_x(t) \rangle - (2s_0 + 2V_0 \hbar^{-1} \cos(\omega t)) \langle \sigma_y(t) \rangle - 2\gamma\Delta_0 \quad (6)$$

$$\langle \dot{\sigma}_y \rangle = 2V_0 \hbar^{-1} \cos(\omega t) \langle \sigma_x(t) \rangle + (2s_0 + 2\gamma\beta \hbar^{-1}) \langle \sigma_y(t) \rangle + 2\Delta_0 \langle \sigma_z(t) \rangle \quad (7)$$

$$\langle \dot{\sigma}_z \rangle = -2\Delta_0 \langle \sigma_y(t) \rangle \quad (8)$$

其中,  $\langle \sigma_x(t) \rangle$ 、 $\langle \sigma_y(t) \rangle$  分别为体系的两个态之间的布居数差和粒子的平均位置。

现在我们固定外场的大小, 并让满足频率共振条件  $\omega_0 = 2\Delta_0$ , 这样就会使得体系中的激发态的能级发生分裂, 如图 4A 所示。这时我们再调节背景温度, 并分析  $\langle \sigma_x(t) \rangle$  的时间变化序列, 观察其付立叶功率谱, 可以发现, 分裂的能级在跃迁时在功率谱上中心频率  $\omega_0$  的两侧对称分布着两条谱线  $\omega_0 - \varepsilon$  和  $\omega_0 + \varepsilon$ , 现在我们主要讨论其中低频率的那一条  $\omega_0 - \varepsilon$  随  $T$  变化的规律。在图 4 中我们发现, 在低温区域 ( $T < 5$  K) 随着  $T$  的变化, 谱线的有多个峰值出现, 即量子多重随机共振 (QMSR) 现象。当增加温度并超过一定限度 ( $T > 5$  K) 时, 谱峰的高度就很快降低, 最终趋于较低的一条水平线。这意味着该体系在较低的温度区域内存在一系列的温度值, 处于这些状态时体系的动力学特征是量子隧穿过程占主导地位, 但是, 一旦超出了该温度区域, 则耗散对相干隧穿起破坏作用。

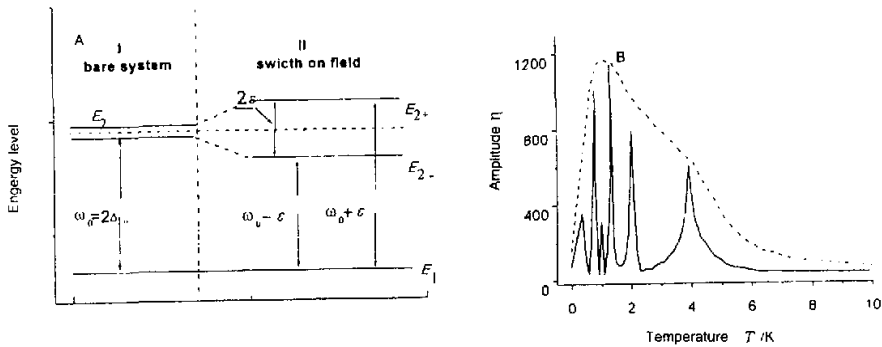
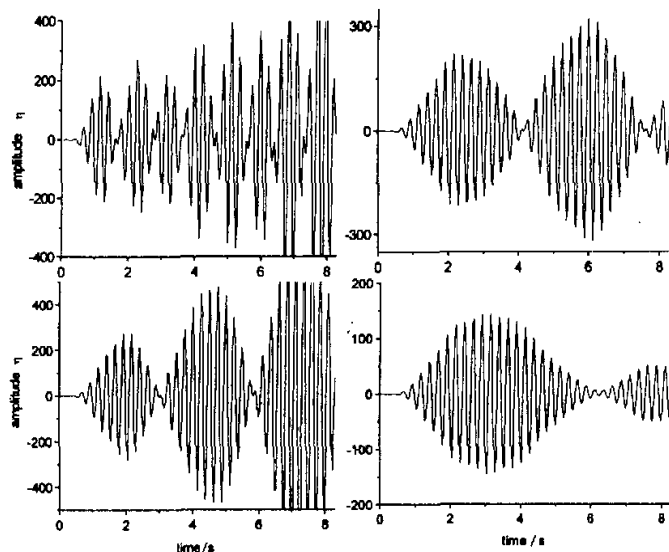


图 4 A. 体系的能级图, I 区域为未加外场, II 区域加周期外场;  
B. 不同温度下振荡幅度的变化(虚线表明极大值的变化趋势)

Fig. 4 A. The energy level of the system, I the bare system, II switch on field;  
B. Amplitude of the oscillation in the average position of the particle  
vs various temperature

上面的现象可以从粒子的位置振幅的时间序列得到定性的了解。如图 5 所示, 由于外场和噪声的共同作用, 粒子就会在两态之间同时参与两种振荡: 其一是被称之为崩塌的振幅锐减快速振荡和逐渐恢复的运动。另一个是这种崩塌-恢复运动随时间的演化也具有周期性。而对于不同的温度  $T$  其周期(频率)也不同, 随着  $T$  的增大而减小, 即  $T$  的增加使得粒子在振荡时达到最大位置的几率逐渐减小, 这意味着粒子隧穿的也相应减小。模拟还发现, 仅仅是满足条件  $T_a = 0.35$ ,  $T_b \approx 2T_a = 0.79$ ,  $T_c \approx 4T_a = 1.32$ ;  $T_d = 0.98$ ,  $T_e \approx 2T_d = 1.98$ ,  $T_f \approx 4T_d = 3.99$ , 等)的那些温度值处, 振荡才有规律性, 相应的位置处就会出现峰值。因而也就很容易理解图 5 中所呈现的 QMSR 现象了。

图5 不同温度下的振幅  $\eta$  的时间序列a.  $T=0.35\text{K}$ , b.  $T=0.79\text{K}$ , c.  $T=1.32\text{K}$ , d.  $T=3.99\text{K}$ Fig.5 Time series of amplitude  $\eta$  for various temperature

综上所述,我们研究了两种体系中的多重随机共振现象,发现改变噪声强度的大小或者调节噪声脉冲间隔的宽度可以实现多重随机共振(SMR),但是要实现随机多重共振的有效控制,则必须综合噪声这两种性质的作用,对于第一种体系我们是从它的动力学方程出发来讨论噪声的影响,而对于第二种所示的量子体系则可从它的哈密顿量出发来着手分析量子噪声对于我们所观测量的影响。另外,我们试着用不同能级之间跃迁的观点来定性的理解随机多重共振现象将有助于人们进一步了解其真正的形成机制。

### 参 考 文 献

- [1] Vilar J M G, Rubi J M. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**: 2882
- [2] Hou Zhonghuai, Yang Lingfa, Xin Houwen. *J. Chem. Phys.*, 1999, **111**: 1592
- [3] Luca Gammaitoni, Mario E, Inchiosa, et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**: 4574
- [4] Francois Chapeu - Blondeau. *Phys. Rev. E*, 2000, **61**: 940
- [5] Neiman A, Sung Wokyung. *Phys. Lett. A*, 1996, **223**: 341
- [6] Jung P, Wiesenfeld K. *Nature*, 1997, **385**: 291
- [7] Bezrukov S M, Vodyanoy I. *Chaos*, 1998, **8**: 557
- [8] Bezrukov S M, Vodyanoy I. *Nature*, 1997, **385**: 319
- [9] Hou Zhonghuai, Xin Houwen. *Phys. Lett. A*, 1999, **263**: 360
- [10] Kádár S, Wang J C, Showalter K. *Nature*, 1998, **391**: 770
- [11] Xin Houwen(辛厚文). *Chin. J. Chem. Phys.* (化学物理学报), 2000, **13**: 388
- [12] (a) Jiang Yongjun(蒋勇军), Zhong Shi(钟实), Xin Houwen(辛厚文). *Chin. J. Chem. Phys.* (化学物理学报), 2000, **2**: 161

- (b) Collins J J, *et al.* . *Phys. Rev. E*, 1996, **54**: 5575
- [13] (a) Jung P, *et al.* . *Phys. Rev. Lett.* , 1995, **74**: 2130  
(b) Jung P, Wiesenfeld K. *Nature*, 1997, **385**: 291
- [14] (a) Grigorenko A N, Nikitin S I, Roschepkin G V. *Phys. Rev. E*, 1997, **56**: R4097  
(b) Casado J M. *Phys. Lett. A*, 1997, **235**: 489  
(c) Eichwald C, Walleczek. *Phys. Rev. E*, 1996, **77**: 2863  
(d) Bezrukov S M, Vodyanoy I. *Nature*, 1997, **385**: 319
- [15] Goychuk, Hanggi P. *Phys. Rev. E*, 1999, **59**: 5137
- [16] Jayannavar A M. *Phys. Rev. E*, 1993, **48**: 837

## Controlled Stochastic Multiresonance by Noise in Two Kinds Systems \*

Zhang Jiqian, Xin Houwen \*\*

(*Department of Chemical Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026* )

**Abstract** This paper introduces a new control scheme for controlling stochastic multiresonance (SMR) in two kinds of systems, through the variation of the noise pulse interval or intensity by computer simulation. Meanwhile, in quantum dissipative two-level system, quantum stochastic multiresonance can be realized by adjusting the quantum noise. In addition, this paper explained how the SMR forms in this kind of system by using the concept of hopping between different energy levels. The aspects of the SMR in this system are discussed.

**Key words** (Quantum) stochastic multiresonance, Control, Noise pulse interval, Signal-to-noise ratio, Hopping of energy level

\* Project supported by the National Science Foundation of China (No.29892165)

\*\* To whom correspondence should be addressed. Email: nclxin@mail.ustc.edu.cn