

颗粒增强复合材料电导性能研究

张 仲*

(山东建材工业学院基础部 济南 250022)

原承武

(北京石油大学石油工程系 北京 102200)

摘 要：将弹性理论中的变换场概念引入电磁学领域，并从第一性原理出发，通过拟合颗粒的边界条件和 Fourier 分析，建立了确定颗粒增强复合材料内电场的积分方程，在此基础上对其电导率做了研究，其理论结果与实验结果比较吻合。该方法不再受颗粒形状及体系结构的限制，为研究复合材料的电导性能开辟了新途径。

关键词：颗粒；复合材料；电导性能；变换电场

中图分类号：O482.4

文献标识码：A

1 前 言

复合材料在我们日常生活中已是屡见不鲜。而描述复合材料物理性质的理论及方法却不够完善。Maxwell 和 Fricke 先后利用第一性原理对含球形和椭球形颗粒的复合材料的电导性能做了理论研究^[1]，此理论中忽略了杂质颗粒间的相互作用，因而对较高颗粒浓度的体系不适用；后来由 Tebbrey、Rayleigh、Meredith 和 Tobias 等人在该方面做了研究^[2-4]，虽然考虑了颗粒间的相互作用对体系的影响，但此结果只适应于颗粒在基质中构成的筒立方体系，因而该方法对体系结构具有很强的限制。本文将弹性理论中的变换场概念引入电磁学领域，即将一种场在考虑边界条件下变换到另一种易解的场。同时从数学的第一性原理出发，即考虑系统的边界条件，从运动方程出发，建立了确定复合材料内电场的积分方程，在此基础上给出了计算其电导率的公式，该方法克服了颗粒浓度和体系结构的限制，为研究复合材料的电导性能创建了一种新方法。

2 变换电场的引入

本文讨论复合材料的直流电导性能，主要体现在研究复合材料的电导率。设在基质中掺杂另一种物质的固体颗粒，该杂质颗粒在基质中构成周期性点阵，整个复合材料可以分成具有周期重复的原胞。其中 V_1 为原胞区域中基质的体积，该区域的电导率为 $\sigma_{\alpha\beta}^1$ ； V_2 为原胞区域中杂质颗粒占据的体积，其电导率为 $\sigma_{\alpha\beta}^2$ ，原胞总体积 $V = V_1 + V_2$ 。本文采用哑指标规则，分别用希腊字母表示，取 1、2、3 时，分别对应于 x 、 y 、 z 分量。

* 通讯联系人。

在复合材料某一方向上施加电场,当材料没有杂质颗粒时,其基质内的电场为 $E_{\alpha\beta}^0$,则有:

$$j_{\alpha}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^1 E_{\alpha\beta}^0 \quad (1)$$

其中, $j_{\alpha\beta}^0$ 为无杂质颗粒时基质内的电流密度。对于上文给定的材料,由于杂质颗粒的存在,基质与杂质颗粒之间必有相互作用,其基质内的电场和电流密度不再是 j_{α}^0 和 $E_{\alpha\beta}^0$,应变为:

$$\begin{aligned} j_{\alpha}^1(r) &= \sigma_{\alpha\beta}^1 E_{\beta}^1(r) \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^1 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^1(r)] \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $j_{\alpha}^1(r)$ 和 $E_{\beta}^1(r)$ 分别是 V_1 中的电流密度和电场强度, $\delta E_{\beta}^1(r)$ 是由于杂质存在时引起基质中电场的改变量。 V_2 区域内的电流密度 $j_{\alpha}^2(r)$ 与电场强度 $E_{\beta}^2(r)$ 之关系如下

$$\begin{aligned} j_{\alpha}^2(r) &= \sigma_{\alpha\beta}^2 E_{\beta}^2(r) \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^2 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^2(r)] \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\delta E_{\beta}^2(r)$ 为区域 V_2 中因杂质颗粒存在时电场的改变量。由边界条件 $j_{\alpha}^1(r) = j_{\alpha}^2(r)$, 有

$$\sigma_{\alpha\beta}^1 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^1(r)] = \sigma_{\alpha\beta}^2 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^2(r)]$$

引进变换电场 $E_{\beta}^*(r)$, 为了保证边界条件,使得 $E_{\beta}^*(r)$ 在 V_1 内为零,在 V_2 内满足下式

$$\sigma_{\alpha\beta}^2 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^2(r)] = \sigma_{\alpha\beta}^1 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^1(r) - E_{\beta}^*(r)] \quad (4)$$

引入 $E_{\beta}^*(r)$ 后,可以将式(2)(3)统一表示为:

$$j_{\alpha}^i(r) = \sigma_{\alpha\beta}^i [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^i(r) - E_{\beta}^*(r)] \quad (5)$$

式中, $\delta E_{\beta}^i(r)$ 是指 V_1 中电场改变量 $\delta E_{\beta}^i(r)$, 为简便以后均省略上标 1。在稳定条件下,稳态条件得到满足的同时,边界条件必然得到满足^[5]。而变换电场 $E_{\beta}^*(r)$ 所满足的求解方程成为本文研究问题的关键。

3 确定变换电场 $E_{\beta}^*(r)$ 的积分方程

对于稳恒电流,稳态条件为:

$$\partial_{\alpha} j_{\alpha}^i(r) = 0$$

将式(5)代入上式可得:

$$\partial_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^1 [E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^1(r) - E_{\beta}^*(r)] = 0$$

由式(1)和稳态条件,上式变为:

$$\partial_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^1 [\delta E_{\beta}^1(r) - E_{\beta}^*(r)] = 0 \quad (6)$$

引进电位微量 $\delta\varphi$, 则与电场改变量 $\delta E_{\beta}^1(r)$ 的关系为:

$$\delta E_{\beta}^1(r) = -\partial_{\beta} \delta\varphi(r) \quad (7)$$

由于体系自身的周期性,则 $E_{\beta}^*(r)$ 、 $\delta\varphi(r)$ 均具有周期性,可作 Fourier 展开有:

$$\begin{aligned} E_{\beta}^*(r) &= E^*(\xi_n) \exp(i\xi_n \cdot r) \\ \delta\varphi(r) &= \sum_n \delta\varphi(\xi_n) \exp(i\xi_n \cdot r) \end{aligned} \quad (8)$$

其逆变换为

$$\begin{aligned} E^*(\xi_n) &= \frac{1}{V} \int_{V_2} E^*(\xi_n) \exp(-i\xi_n \cdot r) \\ \delta\varphi(\xi_n) &= \frac{1}{V} \int_{V_2} \delta\varphi(r) \exp(-i\xi_n \cdot r) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ξ_n 是倒格矢。考虑到式(7)(8)可得

$$\delta E_{\alpha}(r) = -i \sum_n \xi_{n\alpha} \delta \varphi(\xi_n) \exp(i \xi_n \cdot r) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (10)$$

将式(8)中第一式和式(10)代入式(6)中有

$$\partial_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^1 \left[-i \sum_n \xi_{n\beta} \delta \varphi(\xi_n) \exp(i \xi_n \cdot r) - \sum_n E_{\beta}^*(\xi_n) \exp(i \xi_n \cdot r) \right] = 0$$

即

$$\sum_n \sigma_{\alpha\beta}^1 \xi_{n\alpha} \xi_{n\beta} \delta \varphi(\xi_n) - i \sigma_{\alpha\beta}^1 \xi_{n\alpha} E_{\beta}^*(\xi_n) \exp(i \xi_n \cdot r) = 0$$

整理得

$$\sigma_{\alpha\beta}^1 \xi_{n\alpha} \xi_{n\beta} \delta \varphi(\xi_n) = i \sigma_{\alpha\beta}^1 \xi_{n\alpha} E_{\beta}^*(\xi_n)$$

式中,左端哑指标 α, β 改为 γ, δ 表示,以免与分子上的哑指标重复,则有

$$\delta \varphi(\xi_n) = i \sigma_{\alpha\beta}^1 \xi_{n\alpha} E_{\beta}^*(\xi_n) (\sigma_{\gamma\delta}^1 \xi_{n\gamma} \xi_{n\delta}) \quad (11)$$

把式(11)代入式(10)中并注意到哑指标的替换得

$$\delta E_{\alpha}(r) = \sum_n \xi_{n\alpha} \xi_{n\beta} \sigma_{\beta\gamma}^1 E_{\gamma}^*(\xi_n) (\sigma_{\gamma\delta}^1 \xi_{n\gamma} \xi_{n\delta}) \exp(i \xi_n \cdot r) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

将上式和式(11)代入式(4)中,可得

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\alpha}^1 E_{\alpha}^*(r) &= (\sigma_{\beta\alpha}^1 - \sigma_{\beta\alpha}^2) E_{\alpha}^0 + (\sigma_{\beta\alpha}^1 - \sigma_{\beta\alpha}^2) \frac{1}{V} \sum_n \xi_{n\alpha} \xi_{n\gamma} \sigma_{\gamma\delta}^1 (\sigma_{\eta k}^1 \xi_{n\eta} \xi_{nk})^{-1} \\ &\times \int_{V_2} E_{\delta}^*(r') \exp[i \xi_n \cdot (r - r')] \mathrm{d}r' \quad \beta = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (12)$$

这就是变换电场 $E_{\beta}^*(r)$ 所满足的积分方程。

4 复合材料的电导率定义及线性求解方法

仿照均匀材料电导率的定义,复合材料的电导率定义如下:

$$\langle j_{\alpha}^i(r) \rangle = \sigma_{\alpha\beta}^* \langle E_{\beta}^i(r) \rangle \quad (13)$$

其中, $\sigma_{\alpha\beta}^*$ 为复合材料电导率张量, $j_{\alpha}^i(r)$ 、 $E_{\alpha}^i(r)$ 分别是复合材料内某点的电流密度和电场强度, $\langle \rangle$ 表示取平均。

$$\therefore \langle E_{\beta}^i(r) \rangle = \langle E_{\beta}^0 \rangle + \langle \delta E_{\beta}^i(r) \rangle$$

其中, $\delta E_{\beta}^i(r)$ 在 V_1 是指 $\delta E_{\beta}^1(r)$, 在 V_2 是指 $\delta E_{\beta}^2(r)$, 由 $\delta \varphi$ 的周期性有

$$\langle \delta E_{\beta} \rangle = \langle -\partial_{\beta} \delta \varphi \rangle = 0$$

$$\therefore \langle E_{\beta}^i(r) \rangle = \langle E_{\beta}^0 \rangle = E_{\beta}^0$$

又由式(5)知:

$$\begin{aligned} \langle j_{\alpha}^i(r) \rangle &= \sigma_{\alpha\beta}^1 \langle E_{\beta}^0 + \delta E_{\beta}^i(r) - E_{\beta}^*(r) \rangle \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^1 E_{\beta}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^1 \langle E_{\beta}^*(r) \rangle \end{aligned}$$

于是,式(13)可化为

$$\sigma_{\alpha\beta}^* E_{\beta}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^1 E_{\beta}^0 - \sigma_{\alpha\beta}^1 \langle E_{\beta}^*(r) \rangle$$

可见电导率张量为

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = [\sigma_{\alpha\beta}^1 E_{\beta}^0 - \sigma_{\alpha\beta}^1 \langle E_{\beta}^*(r) \rangle] / E_{\beta}^0 \quad (14)$$

由式(12)和式(14)可解出 $\sigma_{\alpha\beta}^*$ 。

由于式(14)是一个线性方程,我们可以利用线性方程的迭加性质来计算 $\sigma_{\alpha\beta}^*$ 。首先对复合材料在 x 方向上施加一电场,则有

$$\sigma_{xx}^* E_x^0 = \sigma_{xx}^1 E_x^0 - \sigma_{xx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{xy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{xz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (15)$$

E^* 中上标 x 表示 x 方向上施加的电场。同样,对复合材料在 x 、 y 方向上分别施加电场,可有

$$\sigma_{yy}^* E_y^0 = \sigma_{yy}^1 E_y^0 - \sigma_{yx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{yy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{yz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (16)$$

$$\sigma_{zz}^* E_z^0 = \sigma_{zz}^1 E_z^0 - \sigma_{zx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{zy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{zz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (17)$$

显然,从式(15)(16)(17)中可求出 σ_{xx}^* 、 σ_{yy}^* 、 σ_{zz}^* 。在 x 、 y 方向上同时施加电场,可有

$$\sigma_{zy}^* E_y^0 = \sigma_{zy}^1 E_y^0 - \sigma_{zx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{zy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{zz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (18)$$

$$\sigma_{yx}^* E_x^0 = \sigma_{yx}^1 E_x^0 - \sigma_{yx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{yx}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{yz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (19)$$

可以用同样的方法推出 σ_{xz}^* 、 σ_{yx}^* 、 σ_{yz}^* 、 σ_{zy}^* 的计算公式,结果如下:

$$\sigma_{xz}^* E_z^0 = \sigma_{xz}^1 E_z^0 - \sigma_{xx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{xy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{xz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle$$

$$\sigma_{yx}^* E_x^0 = \sigma_{yx}^1 E_x^0 - \sigma_{zx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{zy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{zz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle \quad (20)$$

$$\sigma_{yz}^* E_z^0 = \sigma_{yz}^1 E_z^0 - \sigma_{yx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{yy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{yz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle$$

$$\sigma_{zy}^* E_y^0 = \sigma_{zy}^1 E_y^0 - \sigma_{zx}^1 \langle E_x^*(r) \rangle - \sigma_{zy}^1 \langle E_y^*(r) \rangle - \sigma_{zz}^1 \langle E_z^*(r) \rangle$$

可见,只要从式(12)中求出形变电场,就可以较简单地求出电导率张量 $\sigma_{\alpha\beta}^*$ 。

4 与实验结果的比较

将式(12)中的 $E_\alpha^*(r)$ 做幂级数展开,取到第五级近似,代入式(15)中,可得到复合材料电导率的表示式。本文在实验上选用了 SiC 颗粒增强铝合基复合材料。SiC 颗粒选用粒度不同的工业用砂轮磨粒,体积含量为 15%。基体采用工业纯铝粉配制,其化学成份见表 1。其中,铝粉经过 0.100 mm 过筛,铜粉经过 0.044 mm 筛,在基体材料上通过三种筛按图 1 所示制作二维原胞网络,铺垫 SiC 颗粒后进行压制而成。

表 1 基体化学成份(体积%)

Table 1 Chemical composition of the matrix (vol%)

Cu	Mg	Fe	Si	Al
4.5	0.7	< 0.5	< 0.1	Others

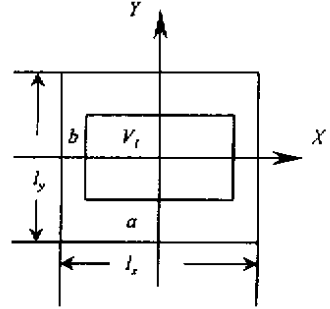


图 1 复合材料二维原胞图

Fig.1 Two-dimensional cell of composite

通过测量样品电阻率的方法间接测量 σ_{xx} 、 σ_{yy} 。取样品边长为 30.0 mm、厚为 1.0 mm 的正方体,将样品接入开尔文双臂电桥中, x 、 y 方向分别为原胞长边方向和短边方向。同时,按图 1 所示的原胞计算出 σ_{xx} 、 σ_{yy} 值,将理论与实验值进行对比,其结果分别列入表 2 和表 3。

表 2 SiC/Al 复合材料 σ_{xx}^*/σ_1 理论与实验值对比

Table 2 The theoretical σ_{xx}^*/σ_1 results of the SiC/Al composite comparing with the experimental

l_x/l_y	a/l_y	b/l_y	Theoretical	Experimental	Relative error%
1.0	1/2	1/2	0.8052	0.8071	2.3
1.2	1/2	1/2	0.8314	0.8325	1.3
1.0	1/3	1/3	0.9082	0.9102	2.2
1.2	1/3	2/3	0.8260	0.8278	2.2
1.0	1/5	2/5	0.9237	0.9261	2.5
1.1	1/5	2/5	0.9301	0.9316	1.6

表 3 SiC/Al 复合材料 σ_{yy}^*/σ_1 理论值与实验值对比Table 3 The theoretical σ_{yy}^*/σ_1 results of the SiC/Al composite comparing with the experimental

l_x/l_y	a/l_y	b/l_y	Theoretical	Experimental	Relative error%
1.0	1/2	1/2	0.8052	0.8068	2.0
1.2	1/2	1/2	0.8378	0.8392	1.7
1.0	1/3	1/3	0.9082	0.9106	2.6
1.2	1/3	2/3	0.8710	0.8725	1.7
1.0	1/5	2/5	0.9406	0.9426	2.1
1.1	1/5	2/5	0.9461	0.9477	1.7

表中 l_x 、 l_y 分别为原胞的边长, 在这里分别取目筛孔的长边和短边, a 、 b 分别为杂质颗粒沿 x 方向与 y 方向的等效径, σ_1 取 20°C 下的 $4.12 \times 10^2 \text{m}/\Omega$ 。本文对其它分量也做了计算, 由于篇幅太长, 这里不再给出。从表中可见理论结果与实验值的一致性是令人满意的。

参 考 文 献

- [1] Meredith R E, Tobias C W. *Appl. Phys.*, 1960, **31**:1270
 [2] Mc Phedran R C, Mc Kenzie D R. *Proc. Roy. Soc. A*, 1978, **45**:349
 [3] Mc Kenzie D R, Mc Phedran R C, Derrick G H. *Proc. Roy. Soc. A*, 1978, **45**:362
 [4] Yuan L Y, Tao R. *Phys. C*, 1988, **21**:401
 [5] Liang Canbir(梁灿彬), et. al.. *Electromagnetic(电磁学)*, The People's Education Press(人民教育出版社), Beijing(北京), 1980:230

The Studies on the Eletrical Conductivities Performance of Particle Filled Composite

Zhang Zhong*

(Foundation Department, Shandong Institute of Building Materials, Jinan 250022)

Yuan Chengwu

(Oil Engineer Department, Beijing University of Oil, Beijing 102200)

Abstract This paper induces alternate field of elastic theory into electromagnetics, from the first principle, sets up an integral equation of determining electric field in composite by border condition imitating and Fourier analysis, further studies its electrical conductivities, theoretical result is identical with experimental value. The method of this paper is not limited by particle density and system structure, it opens a new way about studying the conductance of composite.

Key words Particles, Composite, Conductance, Alternate electric field

* To whom correspondence should be addressed.